به نام خدا



سایت گروه آموزشی آلم

ابتدایی، راهنمایی، دبیرستان، کنکور و دانشگاه

www.g-alm.ir	
www.g-alm.ir/ac	دانشگاه
www.g-alm.ir/forum	انجمن
www.g-alm.ir/azmoon	آزمون های آلم
www.g-alm.ir/shop	فروشگاه
www.film.g-alm.ir	فیلم های آموزشی

www.g-alm.ir

(۱
(۲

$$x_p(t) = v_0 \cos\theta\, t \quad , \quad y_p(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta\, t$$

$$x_t(t) = x_0 \quad , \quad y_t(t) = y_0 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2$$

ب) در لحظه برخورد $x_t(t_1) = x_p(t_1)$ ، در نتیجه $t_1 = \frac{x_0}{v_0 \cos\theta}$.

شرط این که برخورد پرتابه به هدف بالای سطح افق باشد این است که $0 \leq y_p(t_1) \leq y_0$.

$$y_p(t_1) \geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{2} g \left(\frac{x_0}{v_0 \cos\theta}\right)^2 + v_0 \sin\theta \frac{x_0}{v_0 \cos\theta} \geq 0$$

(۱) $$\operatorname{tg}^2\theta - 2\frac{v_0^2}{gx_0}\operatorname{tg}\theta + 1 \leq 0$$

اگر ریشه‌های این معادله را $\operatorname{tg}\theta_1$ ، $\operatorname{tg}\theta_2$ بنامیم

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{v_0^2}{gx_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1} \quad , \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{v_0^2}{gx_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1}$$

جواب نامعادله (۱) $\operatorname{tg}\theta_1 < \operatorname{tg}\theta < \operatorname{tg}\theta_2$ است.

$$y_p(t_1) \leq y_0 \Rightarrow$$

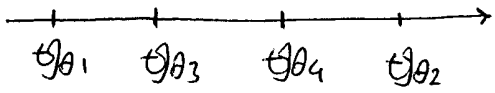
(۲) $$\operatorname{tg}^2\theta - 2\frac{v_0^2}{gx_0}\operatorname{tg}\theta + 1 + \frac{2v_0^2 y_0}{gx_0^2} \geq 0$$

اگر ریشه‌های این معادله را $\operatorname{tg}\theta_3$ ، $\operatorname{tg}\theta_4$ بنامیم

$$\operatorname{tg}\theta_3 = \frac{v_0^2}{gx_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0^2 y_0}{gx_0 x_0} - 1} \quad , \quad \operatorname{tg}\theta_4 = \frac{v_0^2}{gx_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0^2 y_0}{gx_0 x_0} - 1}$$

جواب نامعادله (۲) $\operatorname{tg}\theta < \operatorname{tg}\theta_3$ ، $\operatorname{tg}\theta > \operatorname{tg}\theta_4$ است.

جواب‌ها به ترتیب بزرگی به این صورت‌اند



اشتراک این جواب‌ها، یعنی جواب نهایی سؤال عبارتند از

$$\frac{v_0^2}{gx_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1} < \operatorname{tg}\theta < \frac{v_0^2}{gx_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0^2 y_0}{gx_0 x_0} - 1}$$

$$\frac{v_0^2}{gx_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0^2 y_0}{gx_0 x_0} - 1} < \operatorname{tg}\theta < \frac{v_0^2}{gx_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1}$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

شرط وجود این محدوده ها مادامی که زیر رادیکال y_0 منفی نشود این است که $\frac{v_0^2}{gx_0} \geq 1$. وقتی زیر رادیکال y_0 منفی شود یعنی $\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0}{gx_0}\frac{y_0}{x_0} - 1 < 0$ نامعادله (۲) برقرار است ($y_p(t_1) \leq y_0$ حتماً برقرار است). در این وضعیت فقط باید $y_p(t_1) \geq 0$ یعنی

$$\frac{v_0^2}{gx_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1} \leq \tg\theta \leq \frac{v_0^2}{gx_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2 - 1}$$

که باز هم باید $\frac{v_0^2}{gx_0} \geq 1$.

برای $g = 10\,m/s^2$ ، $v_0 = 50\,m/s$ ، $y_0 = 100\,m$ ، $x_0 = 50m$:

$\tg\theta_1 = 5 - 2\sqrt{6}$ ، $\tg\theta_2 = 5 + 2\sqrt{6}$ ، $\tg\theta_3 = 3$ ، $\tg\theta_4 = 7$

ج) در هنگام برخورد $y_p(t_1) = y_t(t_1)$ که در نتیجه $t_1 = \frac{x_0}{v_0\cos\theta}$.

$$\sin\theta = \left(\frac{y_0}{x_0} - \frac{1}{2}\frac{gt_0^2}{x_0}\right)\cos\theta + \frac{gt_0}{v_0}$$

که با اندازه‌گیری داده شده خواهد شد

$$\sin\theta = (2 - 0.1t_0^2)\cos\theta + 0.2t_0 \Rightarrow t_0^2 - \frac{2}{\cos\theta}t_0 + 10(\tg\theta - 2) = 0$$

از آنجایی که باید $t_1 > t_0$ باشد جواب قابل قبول $t_0 = \frac{1}{\cos\theta} - \sqrt{(\tg\theta - 3)(\tg\theta - 7)}$ است.

بنابراین

$t_0|_{\theta_3} = \sqrt{10}\,s$ ، $t_0|_{\theta_4} = \sqrt{50}s$

$t_0|_{\theta_1} = -(\sqrt{80} - \sqrt{30})s$ ، $t_0|_{\theta_2} = \sqrt{30}\,s$

در نتیجه $-(\sqrt{80} - \sqrt{30})s \leq t_0 \leq \sqrt{10}\,s$ برای $5 - 2\sqrt{6} \leq \tg\theta \leq 3$

و $\sqrt{30}\,s \leq t_0 \leq \sqrt{50}\,s$ برای $7 \leq \tg\theta \leq 5 + 2\sqrt{6}$

د) برای $t_0 = \sqrt{10}\,s$ از

$$\sqrt{10} = \frac{1}{\cos\theta} - \sqrt{(\tg\theta - 3)(\tg\theta - 7)}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{1 + \tg^2\theta} - \sqrt{(\tg\theta - 3)(\tg\theta - 7)} \Rightarrow \tg\theta = 3 \Rightarrow \theta = \text{Arc}\tg 3$$

و $\theta = \frac{\pi}{4} + \text{Arc}\sin\frac{1}{\sqrt{5}}$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

۲) آ)

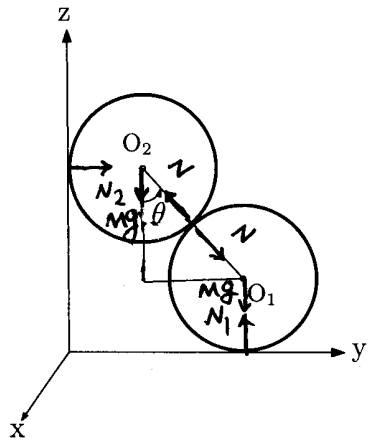
(1) $y_1 = R + 2R\sin\theta \,,\; z_1 = R \qquad y_2 = R \,,\; z_2 = R + 2R\cos\theta$

ب)

$$\begin{cases} N\sin\theta = Ma_1 \\ N_1 - Mg - N\cos\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -Mg + N\cos\theta = Ma_2 \\ N_2 - N\sin\theta = 0 \end{cases}$$

از دو معادله‌ی شامل a_1 و a_2 :

(۲) $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a_1}{a_2+g}$$



ج) اگر مبدأ پتانسیل گرانشی را صفحه‌ی x-y بگیریم

$$0 + MgR + Mg(3R) = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + MgR + Mg(R+2R\cos\theta)$$

$$\Downarrow$$

(۳) $$v_1^2 + v_2^2 = 4gR(1-\cos\theta)$$

د) $$(y_1-R)^2 + (z_2-R)^2 = 4R^2$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان : $v_1(y_1-R) + v_2(z_2-R) = 0$

(۴) با مشتق‌گیری مجدد نسبت به زمان : $v_1^2 + v_2^2 + a_1(y_1-R) + a_2(z_2-R) = 0$

از قرار دادن معادلات (۱) و (۳) در معادله‌ی (۴) : (۵) $a_1\sin\theta + a_2\cos\theta + 2g(1-\cos\theta) = 0$

از معادله‌ی (۲) و (۵) :

$$a_1 = (3\cos\theta - 2)\,g\sin\theta \,,\quad a_2 = (3\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)\,g$$

از قسمت ب) :

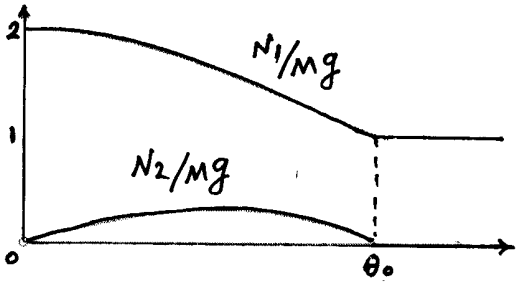
$$N_2 = Ma_1 \Rightarrow N_2(\theta) = Mg\sin\theta\,(3\cos\theta - 2)$$

$$N_1 = Ma_2 + 2Mg \Rightarrow N_1(\theta) = Mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1)$$

هـ) $N = Ma_1/\sin\theta$ ، $N = Mg(3\cos\theta - 2)$ ، به ازای $\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$ تماس دو استوانه قطع می‌شود .

$$N_1 = \begin{cases} Mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1) & \theta < \theta_0 \\ Mg & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{cases} Mg\sin\theta\,(3\cos\theta - 2) & \theta < \theta_0 \\ 0 & \theta > \theta_0 \end{cases}$$



www.g-alm.ir

۹) ابتدا سرعت v_1 و v_2 را بر حسب $\theta=\theta_0$ بدست می‌آوریم

$$v_1^2\Big|_{\theta=\theta_0} = 4gR(1-\cos\theta_0)\cos^2\theta_0 \Rightarrow v_1(\theta_0) = \sqrt{\frac{16}{27}gR}$$

$$v_2 = -v_1\sin\theta \Rightarrow v_2(\theta_0) = -v_1(\theta_0)\sin\theta_0 = -\sqrt{\frac{20}{27}gR}$$

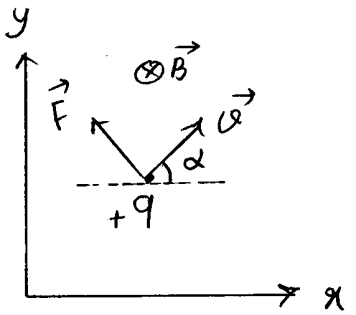
اگر v_{2f} سرعت استوانه بالایی هنگام رسیدن به صفحه $y-x$ باشد

$$v_{2f}^2 - v_2^2(\theta_0) = -2g\left(R - z_2(\theta_0)\right)$$

$$v_{2f}^2 = v_2^2(\theta_0) + 2g(2R\cos\theta_0) \Rightarrow v_{2f} = -\sqrt{\frac{92}{27}gR}$$

پس سرعت نهایی استوانه زیری $\sqrt{\frac{16}{27}gR}$ و سرعت استوانه بالایی هنگام رسیدن به صفحه $y-x$ ، $-\sqrt{\frac{92}{27}gR}$ است.

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir



۳)

آ) $F = qvB$ و

$$F_x = -F\sin\alpha = -qBv\sin\alpha = -qBv_y$$

$$F_y = F\cos\alpha = qBv\cos\alpha = qBv_x$$

ب)

$$F_x = m\frac{dv_x}{dt} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -\frac{qB}{m}v_y$$

$$F_y = m\frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB}{m}v_x - g$$

ج)

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dv_x}{dt} - 0$$

با قرار دادن معادله اول قسمت ب) در معادله اخیر

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

اگر ω را به صورت $\omega = \frac{qB}{m}$ تعریف کنیم

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \Rightarrow v_y = A\sin(\omega t + \phi)$$

$[\omega] = \frac{[qB]}{m}$ یکای ω عکس زمان است.

اما $F = qvB$

$[qB] = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$

$[\omega] = \frac{MT^{-1}}{M} = T^{-1}$

از معادله دوم قسمت ب)

$$v_x = g/\omega + A\cos(\omega t + \phi)$$

در $t=0$ سرعت اولیه ذره صفر است یعنی

$$v_x(t=0) = 0 \qquad A\cos\phi + g/\omega = 0$$

$$v_y(t=0) = 0 \Rightarrow A\sin\phi = 0$$

$$\Rightarrow \phi = 0 \text{ و } A = -g/\omega$$

بنابراین

$$v_x(t) = \frac{g}{\omega}(1 - \cos\omega t) \text{ و } v_y(t) = -\frac{g}{\omega}\sin\omega t$$

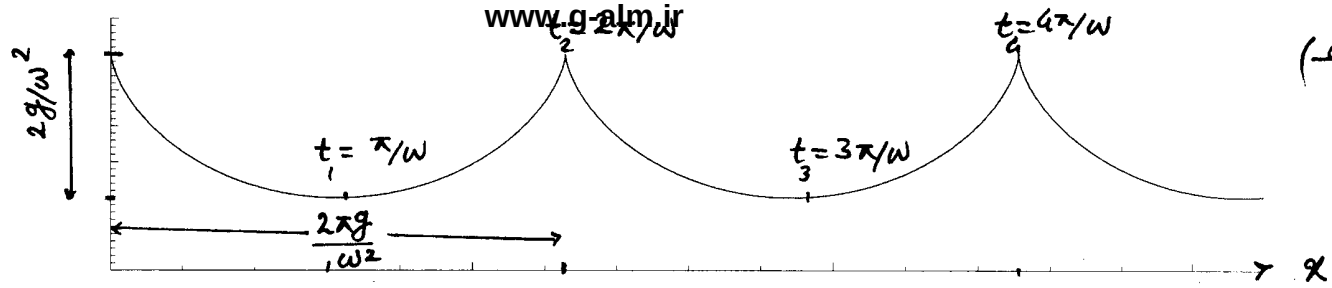
د)

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}\sin\omega t + x_0 \text{ و } y(t) = \frac{g}{\omega^2}\cos\omega t + y_0$$

در $t=0$: $x(0)=0$ و $y(0)=h$ ، بنابراین $y_0 = h - g/\omega^2$ و $x_0 = 0$

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}\sin\omega t \text{ و } y(t) = h - \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$

www.g-alm.ir



ب) در $t=0$ داریم $\begin{cases} v_x(0)=v_0 \\ v_y(0)=0 \end{cases}$ بنابراین $\begin{cases} \phi=0 \\ A=v_0-g/\omega \end{cases}$ و در نتیجه $\begin{cases} v_x=\frac{g}{\omega}+A\cos(\omega t+\phi) \\ v_y=A\sin(\omega t+\phi) \end{cases}$

$$v_x(t)=\frac{g}{\omega}+(v_0-\frac{g}{\omega})\cos\omega t \quad , v_y(t)=(v_0-\frac{g}{\omega})\sin\omega t$$

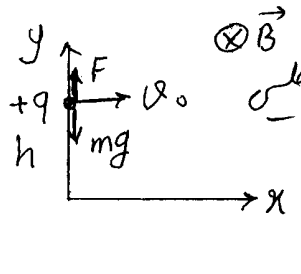
$$x(t)=\frac{g}{\omega}t+(\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2})\sin\omega t+x_0$$

$$y(t)=-(\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2})\cos\omega t+y_0$$

در $t=0$: $\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=h \end{cases}$ بنابراین $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=h+(\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2}) \end{cases}$

$$x(t)=\frac{g}{\omega}t+(\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2})\sin\omega t$$

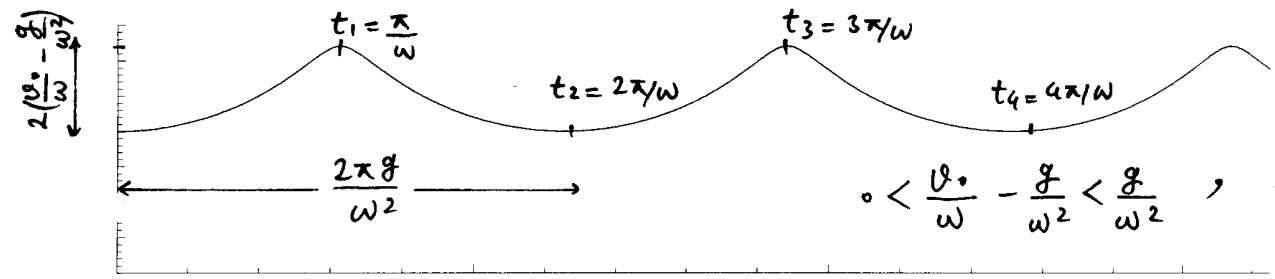
$$y(t)=h+(\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2})(1-\cos\omega t)$$



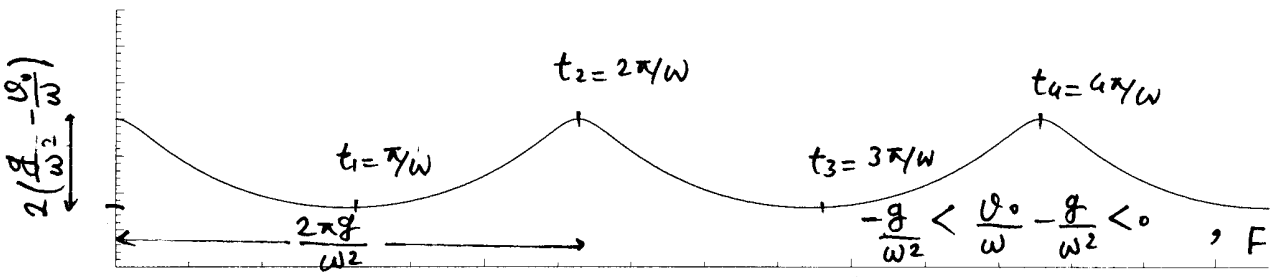
نیروی مغناطیسی $F=qv_0B$

$\frac{g}{\omega}<v_0<\frac{2g}{\omega} \Leftarrow F>mg$ ، $v_0<\frac{2g}{\omega}$

$0<v_0<\frac{g}{\omega} \Leftarrow F<mg$



$0<\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2}<\frac{g}{\omega^2}$ ، $F>mg$



$-\frac{g}{\omega^2}<\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{\omega^2}<0$ ، $F<mg$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

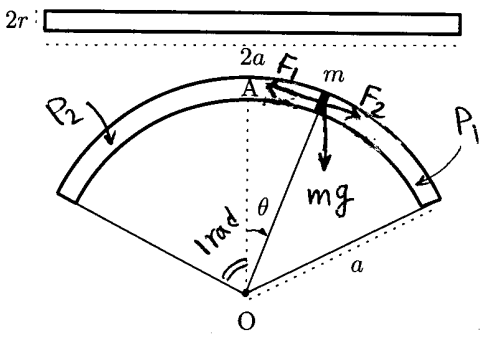
۱۴) اگر در وضعیت θ فشار گاز سمت راست و چپ به ترتیب P_1 و P_2 باشد و در وضعیت $\theta=0$ فشار گاز در دو طرف P_0 باشد، در این صورت

قانون بویل برای گاز سمت چپ: $P_0(\pi r^2)(1)a = P_2(\pi r^2)(1+\theta)a$

" " " راست: $P_0(\pi r^2)(1)a = P_1(\pi r^2)(1-\theta)a$

که $P_0(\pi r^2)(1)a = nRT$

بنابراین $P_1 = \frac{nRT}{\pi r^2 a(1-\theta)}$ ، $P_2 = \frac{nRT}{\pi r^2 a(1+\theta)}$



$F_1 = \pi r^2 P_1 = \frac{nRT}{a(1-\theta)}$

$F_2 = \pi r^2 P_2 = \frac{nRT}{a(1+\theta)}$

نیروی کل عمود بر سطح استوانه

$F = -\frac{2nRT}{a}\frac{\theta}{1-\theta^2} + mg\sin\theta$

است.

ب) در حالت تعادل $F=0$ است و:

که $\sin\theta = \frac{2nRT}{mga}\frac{\theta}{1-\theta^2}$

$K(\theta) = \frac{2nRT}{mga}\frac{\theta}{1-\theta^2}$

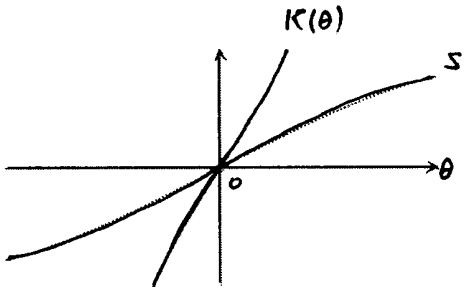
ج) $T>T_c$ که $\sin\theta = \frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2}$

د) $T<T_c$ که $\sin\theta = \frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2}$

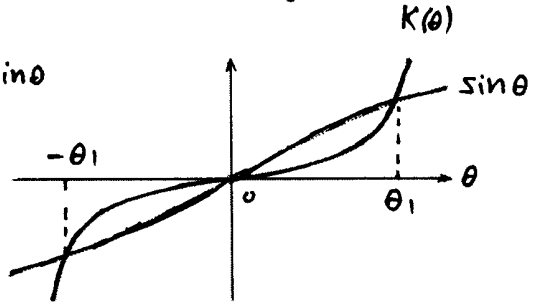
$\frac{dk(\theta)}{d\theta} = \frac{T}{T_c}\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2} > 0$ ، $\left.\frac{dk(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{T}{T_c}$ ، $\left.\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 1$

در حالت ج) شیب $K(\theta)$ در $\theta=0$ از شیب $\sin\theta$ در $\theta=0$ بیشتر است و در حالت د) شیب $K(\theta)$ در $\theta=0$ از شیب $\sin\theta$ در $\theta=0$ کمتر است.

$T>T_c$



$T<T_c$



www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

هـ) در یک نقطه قطع می‌کند $\theta_0=0$.

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0} = mg\cos\theta - \frac{2nRT}{a}\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2}\Bigg|_{\theta_0=0} = mg - \frac{2nRT}{a} = mg\left(1-\frac{T}{T_c}\right)$$

از آنجا که $T>T_c$ است پس $\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0} < 0$ و $\theta_0=0$ تعادل پایدار است.

و) در سه نقطه قطع می‌کند $\theta_0=\pm\theta_1$ ، $\theta_0=0$

$$F=0 \Rightarrow -mg\frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2} + mg\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{T}{T_c} = \sin\theta_0\frac{1-\theta_0^2}{\theta_0}$$

که $T<T_c$ است.

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0} = mg\left(1-\frac{T}{T_c}\right) > 0$$ به ازای $\theta_0=0$

به ازای $\theta_0=\theta_1$

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=\theta_1} = mg\cos\theta_1 - \frac{2nRT}{a}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}$$

$$= mg\left(\cos\theta_1 - \frac{T}{T_c}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}\right)$$

$$= mg\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1\frac{1-\theta_1^2}{\theta_1}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}\right)$$

$$= mg\cos\theta_1\left(1 - \frac{\tan\theta_1}{\theta_1}\frac{1+\theta_1^2}{1-\theta_1^2}\right)$$

چون $-1\text{rad} < \theta_1 < 1\text{rad}$ است بنابراین $\frac{1+\theta_1^2}{1-\theta_1^2} > 1$ ، $\frac{\tan\theta_1}{\theta_1} > 1$ پس

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=\theta_1} < 0$$

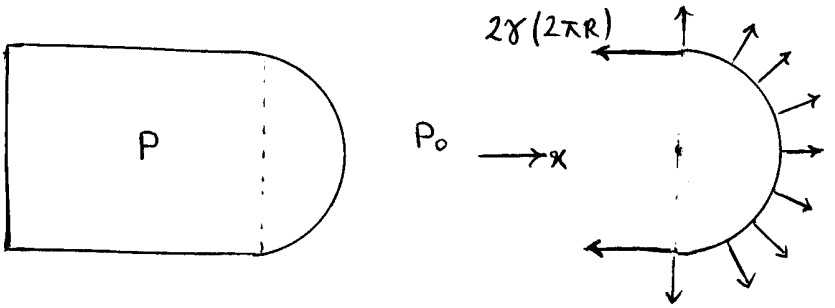
پس به ازای $T<T_c$ ، $\theta_0=0$ نقطه تعادل ناپایدار و

$\theta_0=\pm\theta_1$ نقطه تعادل پایدار است.

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

۵) ۲) نیروی ناشی از فشار بد پوسته ی نیمکره ای شکل در هر نقطه عمود بر سطح نیمکره است. بدآنید



این نیروهای جدائی برابر است با برآیند تصویر این نیروی جدائی در جهت x ، یعنی $(P-P_0)\pi R^2$.

در حالت تعادل : $(P-P_0)\pi R^2 = 2\gamma(2\pi R)$ ولذا $P = P_0 + \frac{4\gamma}{R}$

ب) 1

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}$$

$$T = T_0 \frac{(P_0 + \frac{4\gamma}{R})(\pi R^2 \times 4R + \frac{2}{3}\pi R^3)}{P_0(\pi R^2 \times 4R)}$$

$$T = \frac{7}{6}\left(1 + \frac{4\gamma}{P_0R}\right)T_0$$

ج) 1

$$2\gamma\Delta A = 2\gamma(2\pi R^2 - \pi R^2) = 2\gamma\pi R^2$$

د) 1

$$P_0\Delta V = P_0\frac{2}{3}\pi R^3$$

ه) 1

$$\Delta U = \frac{5}{2}nR\Delta T$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{P_0V_0}{T_0}\right)(T - T_0)$$

$$\Delta U = 10\pi R^3 P_0\left(\frac{1}{6} + \frac{14\gamma}{3P_0R}\right)$$

و) 1

$$\Delta U = Q + W \quad \Rightarrow \quad Q = \Delta U - W$$

$$Q = 10\pi R^3 P_0\left(\frac{1}{6} + \frac{14\gamma}{3P_0R}\right) + 2\gamma\pi R^2 + \frac{2}{3}P_0\pi R^3$$

$$Q = \frac{7}{3}\pi R^3 P_0 + \frac{146}{3}\pi R^2\gamma$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

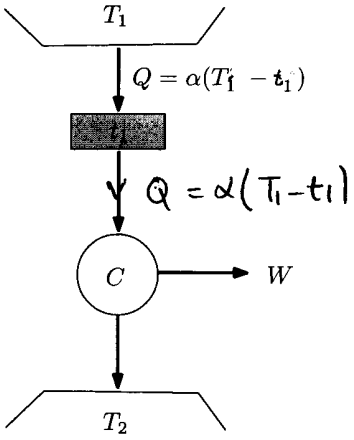
۴) آ) برای چرخه کارنو بازده

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{t_1}$$

است، نیز برابر

$$1 - \frac{T_2}{t_1} = \frac{W}{Q}$$

$$(1) \quad W = \frac{t_1 - T_2}{t_1}\,\alpha\,(T_1 - t_1)$$



ب)

$$\frac{dW}{dt_1} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{t_1^2}\,(T_1 T_2 - t_1^2) = 0$$

$$t_1 = \sqrt{T_1 T_2} \quad , \quad W_{max} = W\Big|_{t_1 = \sqrt{T_1 T_2}} \Rightarrow W_{max} = \alpha\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2$$

ج)

$$Q_2 = Q - W$$

$$W = Q\,\frac{(t_1 - T_2)}{t_1}$$

از قسمت آ)

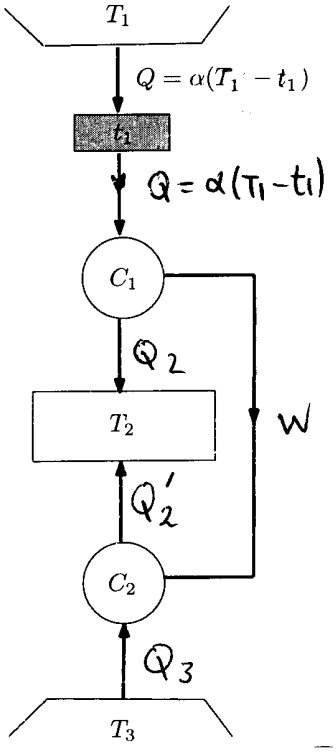
$$(2) \quad Q_2 = \frac{T_2}{t_1} Q \Rightarrow Q_2 = \frac{\alpha T_2 (T_1 - t_1)}{t_1}$$

برای یخچال کارنو

$$(3) \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{Q_3}{Q'_2}$$

همچنین

$$(4) \quad Q'_2 = Q_3 + W$$



از معادله (۱)، (۳) و (۴):

$$Q'_2 = \frac{\alpha T_2 (t_1 - T_2)(T_1 - t_1)}{t_1 (T_2 - T_3)}$$

$$Q_2 + Q'_2 = \frac{\alpha T_2 (T_1 - t_1)(t_1 - T_3)}{t_1 (T_2 - T_3)}$$

د)

$$\frac{d(Q_2 + Q'_2)}{dt_1} = 0$$

$$\frac{\alpha T_2 (T_1 T_3 - t_1^2)}{t_1^2 (T_2 - T_3)} = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{T_1 T_3}$$

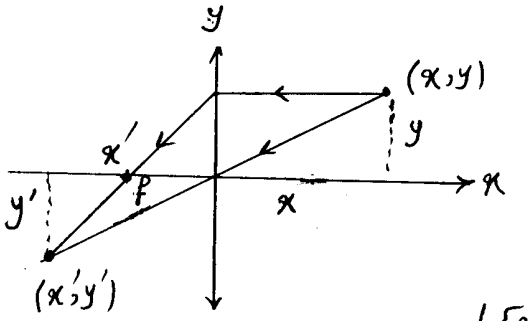
$$(Q_2 + Q'_2)_{max} = (Q_2 + Q'_2)\Big|_{t_1 = \sqrt{T_1 T_3}}$$

$$(Q_2 + Q'_2)_{max} = \frac{\alpha T_2}{T_2 - T_3}\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3}\right)^2$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

(۷
(۳



$$\frac{1}{x} + \frac{1}{-x'} = \frac{1}{f}$$

$$\Downarrow$$

$$x' = -\frac{xf}{x-f} \quad (1)$$

از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه (با نسبت طول جسم به طول تصویر)

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-x'}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x}x'$$

با جایگذاری x' در آن

$$y' = -\frac{yf}{x-f} \quad (2)$$

ب) بازای $t<0$ ذره در سیر Ad به سمت A نزدیک می‌شود

$$Ad: \begin{cases} x = -vt + a \\ y = b \end{cases}$$

با جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x' = -\frac{(a-vt)f}{a-vt-f} \quad , y' = -\frac{bf}{a-vt-f}$$

بازای $0 < t < \frac{2b}{v}$ ذره در سیر BA به سمت B می‌رود

$$AB: \begin{cases} x = a \\ y = b - vt \end{cases}$$

با جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x' = \frac{-af}{a-f} \quad , y' = -\frac{(b-vt)f}{a-f}$$

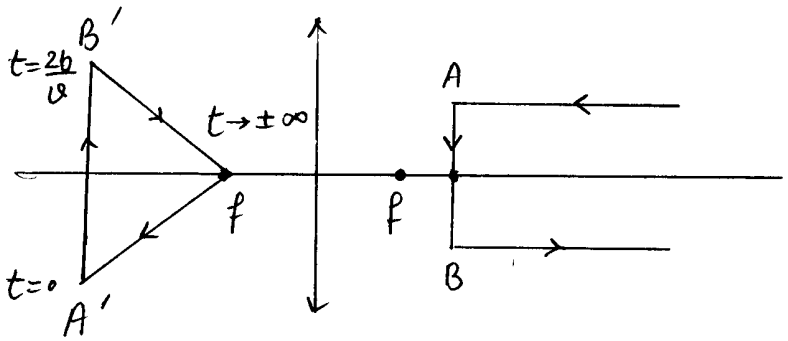
بازای $t > \frac{2b}{v}$ در سیر Bd از B دور می‌شود

$$Bd: \begin{cases} x = a + v\left(t - \frac{2b}{v}\right) = a - 2b + vt \\ y = -b \end{cases}$$

پس از جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x' = -\frac{(a-2b+vt)f}{a-2b+vt-f} \quad , y' = \frac{bf}{a-2b+vt-f}$$

(۴



www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

$A'\left(x_{A'}=\frac{-af}{a-f}\ ,\ y_{A'}=\frac{-bf}{a-f}\right)$ به ازای $t=0$

$B'\left(x_{B'}=\frac{-af}{a-f}\ ,\ y_{B'}=\frac{bf}{a-f}\right)$ به ازای $t=\frac{2b}{v}$

$f\ (x_f=-f\ ,\ y_f=0)$ به ازای $t\to\pm\infty$

ب) از مشتق روابط (۱) و (۲) نسبت به زمان داریم

$$v'_x=\frac{v_x f^2}{(x-f)^2}\ ,\ v'_y=\frac{(v_x y-v_y x)f+v_y f^2}{(x-f)^2}$$

به ازای $t<0$

$$v'_x=-\frac{vf^2}{(a-f-vt)^2}\ ,\ v'_y=-\frac{bvf}{(a-f-vt)^2}$$

به ازای $0<t<\frac{2b}{v}$

$$v'_x=0\ ,\quad v'_y=\frac{vf}{a-f}$$

به ازای $t>\frac{2b}{v}$

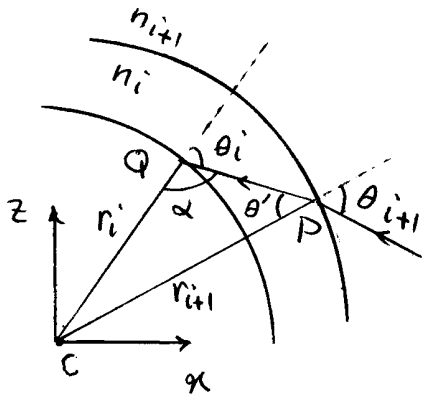
$$v'_x=\frac{vf^2}{(a-2b+vt-f)^2}\ ,\ v'_y=-\frac{bvf}{(a-2b+vt-f)^2}$$

$t'\to\pm\infty$

$$v'_x=0\ ,\ v'_y=0$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

۸)



آ) مبدأ مختصات را مرکز زمین می‌گیریم.

طبق قانون اسنل

$$n_{i+1}\sin\theta_{i+1} = n_i \sin\theta' \qquad (1)$$

از طرفی در مثلث QCP از قانون سینوس داریم:

$$\frac{\sin\theta'}{r_i} = \frac{\sin\alpha}{r_{i+1}}$$

اما $\theta_i+\alpha=\pi$ ، بنابراین $\sin\alpha=\sin\theta_i$ و

$$\frac{\sin\theta'}{r_i} = \frac{\sin\theta_i}{r_{i+1}} \qquad (۲)$$

از معادله‌ی (۱) و (۲):

$$\frac{\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i} = \frac{n_i}{n_{i+1}}\,\frac{r_i}{r_{i+1}}$$

ب) از قسمت قبل پیداست که $n_{i+1}\, r_{i+1}\sin\theta_{i+1} = n_i r_i \sin\theta_i$

با تکرار این رابطه برای هر دو لایه‌ی مجاور یا این که، ثابت $= n_i r_i \sin\theta_i$ است

تساوی را بین بیرونی‌ترین لایه‌ی جو که برای آن $n_\infty = 1$ و زاویه‌ی ورود

پرتو θ_∞ است و لایه‌ی مجاور سطح زمین که برای آن $n=n_0$ و زاویه‌ی

پرتو با خط عمود (محور z) θ_0 است می‌نویسیم:

$$n_0 R \sin\theta_0 = n_\infty (h+R)\sin\theta_\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\theta_\infty = n_0 \frac{R}{R+h}\sin\theta_0$$